Groupe d'isométries du cube (101, 104, 105, 161, 191)

NH2G2 tome 2 p. 219 et 222-223

lem : Soit Y une partie finie de $\mathbb{R}^3$. Si O est un centre de symétrie de Y et $g \in Is(Y)$. Alors $g(O) = O$.
De plus, on a un isomorphisme : $Is(Y) \simeq Is^+(Y) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

démo : Soit s_0 la symétrie de centre O. On a alors $s_0 \in Is^-(Y)$.

Puisque toute application affine de l'espace préserve les barycentres, g fixe l'isobarycentre de Y.
Mais O est le seul point fixe de s_0, donc $Isobar(Y) = O$. D'où $g(O) = O$.

Comme l'application linéaire associée à s_0 est $-Id$ qui commute avec l'application linéaire associée à g et $s_0 \circ g$ et $g \circ s_0$ ont un point fixe commun O, on a $g \circ s_0 = s_0 \circ g$.

Stab de Y par l'action de groupe de $Is(\mathbb{R}^3)$ sur $\mathbb{R}^3$

Donc $F : Is(Y) \longrightarrow Is^+(Y) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un isomorphisme de morphisme réciproque :

$$g \longmapsto \begin{cases} (g, 1) & \text{si } g \in Is^+(Y) \\ (g s_0, s_0) & \text{si } g \in Is^-(Y) \end{cases}$$

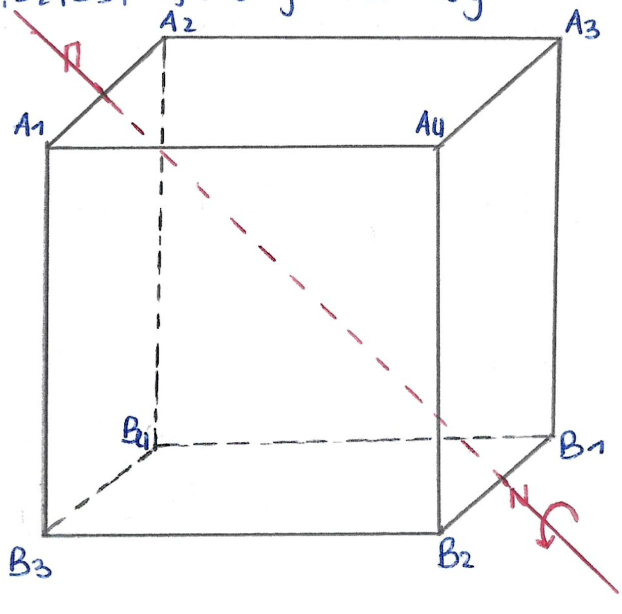
$$G : Is^+(Y) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow Is(Y)$$
$$(g, s_0^i) \longmapsto g s_0^i$$

prop : Soit $\mathscr{C}$ un cube. Les groupes d'isométries de $\mathscr{C}$ sont :

$$Is^+(\mathscr{C}) \simeq S_4 \quad \text{et} \quad Is(\mathscr{C}) \simeq Is^+(\mathscr{C}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

démo : Les grandes diagonales du cube sont au nombre de 4 et ce sont les plus grandes distances que l'on puisse trouver dans un cube. Donc une isométrie envoie une grande diagonale sur une grande diagonale.

On fait donc agir $Is^+(\mathscr{C})$ sur l'ensemble $\mathscr{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ des grandes diagonales du cube.



Ainsi on a le morphisme de groupes suivant :

$$\varphi : Is^+(\mathscr{C}) \longrightarrow S(\mathscr{D}) \simeq S_4.$$
$$g \longmapsto (D_i \longmapsto g(D_i))$$

Montrons que φ est un isomorphisme de groupes :

* φ est injectif : Soit $g \in I^+(\mathscr{C})$ tel que $\varphi(g) = Id_{\mathscr{D}}$.

On note D_i la diagonale A_iB_i. Comme $g(D_i) = D_i$ et que A_i et B_i en sont les points extrémaux, on a alors :

1. Soit g fixe A_i et B_i
2. Soit g permute A_i et B_i.

1^er cas : Si g fixe A_i et B_i pour un i donné. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i = 1$.

Comme $A_1A_2 \neq A_1B_2$ et g est une isométrie, on a que g ne peut pas envoyer A_2 sur B_2 donc par élimination, on obtient que $g(A_2) = A_2$ et $g(B_2) = B_2$.

Par le même raisonnement, on obtient que $g(A_4) = A_4$.

Or (A_1, A_2, B_2, A_4) est un repère affine de l'espace fixé par g.

D'où g est égale à l'identité.

2^ème cas : Si g permute A_i et B_i pour i donné alors $s_0 g$, où s_0 est la symétrie centrale du cube, envoie A_i sur A_i et B_i sur B_i. Donc par le 1^er cas, on a $s_0 g = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Ce qui est absurde.

D'où, $Ker(\varphi) = \{Id_{\mathbb{R}^3}\}$.

* φ est surjectif : Montrons que l'on peut réaliser la transposition (D_1D_2).

Soit M et N les milieux respectifs des segments $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$. Si on réalise un retournement d'axe (MN) alors on obtient la transposition (D_1D_2).

Par le même argument, on obtient toutes les transpositions.

Comme S_4 est engendré par les transpositions, on en déduit la surjectivité de φ.

Ainsi φ est un isomorphisme de groupes. D'où $Is^+(\mathscr{C}) \simeq S_4$.

Comme le cube admet un centre de symétrie (intersection des grandes diagonales), d'après le lemme on obtient

$$\begin{aligned} Is(\mathscr{C}) &\simeq Is^+(\mathscr{C}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ &\simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$